Isometries on Banach algebras (Recent Developments in General Topology and its Related Fields)

AUTHOR(S):

羽鳥, 理

CITATION:

羽鳥, 理. Isometries on Banach algebras (Recent Developments in General Topology and its Related Fields). 数理解析研究所講究録 2020, 2151: 17-39

ISSUE DATE:

2020-04

URL:

http://hdl.handle.net/2433/255063

Isometries on Banach algebras

Osamu Hatori[1]
Institute of Science and Technology, Niigata University

1 序

距離を保存する写像を等距離写像と呼び，本稿のテーマである。等距離写像の研究の歴史は非常に古くまで遡ることができるようである。平面間の等距離写像が回転と裏返しと平行移動を組み合わせてできることの証明は今日では線形代数の初学者にも容易である。Fleming and Jamison [12, p.19] は，Coolidge [8, p.273] によると出版されたものとしては 1831 年の Chasles [7] によるものがある，としている。さらに，Euler[11] は 1776 年に 3 次元の場合の研究を行っているので，2 次元の場合の結果はさらにに古くから知られていたと想像する。（cf. [12, Notes and Remarks 1.6]）

近代的な等距離写像の研究は，コンパクト距離空間上の実数値連続関数全体上の全射等距離写像に対する Banach の定理 [3, Theorem XI. 3] に始まる。1937 年の Stone [57, Theorem 83] による一般化やその後の複素化などを経て，単位的可換 C*環の間の全射等距離複素線形写像は極大イデアル空間の間の同相写像による合成作用素に荷重をかけたものであることを今日は Banach-Stone の定理と呼んでいる。1932 年の Mazur-Ulam の定理 [40] があるためか，Banach や Stone は等距離写像に線形性を仮定していなかった。Mazur-Ulam の定理はノルム空間の間の全射等距離写像は「代数的な中点」を保存することを主張し，従ってそのような写像は実線形等距離写像 + 定数であることが分かる。また，Mazur-Ulam の定理については，距離を保存する写像が自動的に線形構造を保存することを主張している点に注意すべきであり，関数解析学が創始されたときから「保存問題」が意識されていたことがおもしろい。ところで，Banach は ℓ^p 空間上の等距離写像も記述し [3]，$L^p[0,1]$ の場合についても出版する意向を示していたようであるが，結局 Lamperti [37] により Banach の出版しなかった部分が補填された。Banach により始まった等距離写像の研究は，各種の空間や集合上の問題として発展し，現在でも活発に研究がなされている。

[1]This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University. This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers 19K03536.

2 本稿の視点

本稿ではバナッハ環上の等距離写像について述べたい。バナッハ環や一般にノルム空間上の距離はそのノルムによって定められる。したがって，その上の等距離写像は，実線形構造と相性がよいのはむしろ自然である。一方，Banach-Stone の定理は，二つの単位的可換 C^* 環がバナッハ空間として等距離同形であれば，バナッハ環として等距離同形であることを主張する。距離の構造とは一見関係のなさそうな積の構造を保存するところに筆者は興味を惹かれる。本稿では「バナッハ空間として等距離同形 $\longrightarrow$ バナッハ環としてあるいは Jordan バナッハ環として同形」に焦点をあててバナッハ環上の等距離写像を概観したい。そこで，Banach-Stone の定理をはじめとする等距離写像に関する古典的な結果（Banach-Stone の定理，Schur の定理，Kadison の定理）に対して，保存問題の視点から見た証明を与えたい。全射複素線形等距離写像は，定義通りに距離構造を保存するが，その他いろいろな構造や集合を保存しているはずであり，そのような観点からの証明は興味がもたれる。

バナッハ環の歴史を簡単に復習しておく。Beurling や Wiener による研究，von Neumann や Murray による rings of operators（現代的には von Neumann 環) の研究の後に，抽象的なバナッハ環に明確な定義を与えたのは Nagumo（南雲 道夫）[48]（[51, p.11]）であり（cf. [56, p.3] には Nagumo [48] and Yoshida [64] とある），一般のバナッハ環の位相構造に関する深い研究はこのあたりから始まったと考えている。Wiener の補題に対する画期的な別証明を与えた Gelfand は 1939 年にいくつかの論文 [15, 16, 17] を発表し，その詳細を 1941 年に [18] として出版した。そこで示された理論は今日 Gelfand 理論と呼ばれるようになった。Gelfand 理論を用いた Wiener の補題に対する新機軸の証明は，多くの数学者を魅了し，バナッハ環の研究に動機付けを与えることになったと思われる。バナッハ環の教科書においても，”This proof attracted a great deal of attension to Banach algebras. (Rickart [56])” や”It was his astonishingly simple proof of the Wiener theorem that first turned the attention of mathematicians to the new theory. (Żelazko [65])” 等と述べられているように，数学史上の大きな出来事であった。この後多くの数学者がバナッハ環を研究するようになった。

Kadison による Banach-Stone の定理の非可換化が与えられたのは 1950 年代の初頭である [30, 31]。また，同じころに Wermer の maximality theorem [63] により関数環理論が始まり，正則関数のなす環を抽象的に扱うことを念頭に発展していった。ちなみに，コンパクト Hausdorff 空間 X 上の複素数値連続関数からなる $C(X)$ の閉部分環で単位元を含み，X の点を分離するものを X 上の関数環という。ほどなく Nagasawa [46] は Banach-Stone の定理を関数環の場合に拡張し，平面領域上の有界正則関数全体のバナッハ環に対する Chevalley-Kakutani の定理 [32] に応用した。その後正則関数のなす空間上の等距離写像についての研究も盛んに行われるようになり現在でも活発に研究されている。Lipschitz 環上の等距離写像の研究は de Leeuw [9] に始まり，Cambern [5]， Rao and Roy [54] によ

り引き継がれると同時に連続微分可能関数のバナッハ環や絶対連続関数のバナッハ環の研究も開始され，現在に至るまで多くの数学者により多様な研究がなされている。

なお，等距離写像についての基本的な文献として Fleming and Jamison の本 [12, 13] がある。

3　Banach-Stone の定理

今日 Banach-Stone の定理というと，等距離写像に複素線形性を仮定して述べるのが通例である。

Banach-Stone の定理． 写像 T を，コンパクト *Hausdorff* 空間 X 上の複素数値連続関数全体の *Banach* 空間 $C(X)$ から同様の $C(Y)$ の上への複素線形全射等距離写像とする。このとき，$T(1)$ は絶対値が 1 である連続関数であり，同相写像 $\varphi : Y \to X$ が存在して

$$T(f) = T(1)f \circ \varphi, \quad f \in C(X) \tag{3.1}$$

である。逆に (3.1) で与えられる $T : C(X) \to C(Y)$ は線形全射等距離写像である。このとき，$C(X)$ と $C(Y)$ は *Banach*$*$ 環として等距離 $*$ 同形である。

いろいろな証明が知られている。Banach 自身による証明や他の証明方法については [3] や [12] を参照いただきたい。次は，バナッハ空間の間の等距離複素線形写像を一般的に扱えるという意味でも標準的な証明方法である。

・extreme point argument : T の双対写像 T^* が双対空間の間の全射等距離写像であることから T^* は双対空間の閉単位球の間の端点を保存する。双対空間の閉単位球の端点を調べることにより φ を決定する。

また，連続関数やベクトル値連続写像の空間の場合には次のような方法もある。

・peak point argument : ある点で peak する peaking function（$\|f\|_\infty = 1$ かつ $f^{-1}(1) = f^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\})$ の族の T による像が共通の一意的な weak peak point をもつ。この対応は全単射であることがわかり，その逆の対応が φ である。

・Lumer's method : エルミート作用素を決定し，それをもとにして等距離写像を決定する方法。$C(X)$ や Lipschitz 環などのエルミート作用素が豊富な空間に対して有効な方法である。

本稿では，等距離写像がユニタリー群を保存することに着目した証明を紹介する。ユニタリー群は全体の積の構造と密接な関係をもつので，全射複素線形等距離写像が積の構造を保存することに対する一握の理由が見えてくる。

3.1　Banach-Stone の定理の証明

$C(X)$ の極大イデアル空間は X 自身であり，Gelfand 理論により次はよく知られている。

補助定理 3.1. X と Y をコンパクト *Hausdorff* 空間とする $T: C(X) \to C(Y)$ を多元環としての同形写像とする。このとき同相写像 $\varphi: Y \to X$ が存在して

$$T(f) = f \circ \varphi, \qquad f \in C(X)$$

である。

Banach 空間 $\mathfrak{B}$ の閉単位球 $\mathfrak{B}_1 = \{b \in \mathfrak{B} : \|b\| \leq 1\}$ の端点（extreme point）全体を $\mathrm{ext}\, \mathfrak{B}_1$ と書くことにする。次は，端点の定義から容易に導かれ，またよく知られているので証明は省略する。

補助定理 3.2. $\mathfrak{B}$ と $\mathfrak{C}$ を *Banach* 空間とする。$T: \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ が全射実線形等距離写像であるとする。このとき $T(\mathrm{ext}\, \mathfrak{B}_1) = \mathrm{ext}\, \mathfrak{C}_1$ である。

$|f| = 1$ であるような $f \in C(X)$ をユニタリー関数と呼び，その全体を $U_{C(X)}$ であらわすことにする。$U_{C(X)}$ は $C(X)$ のユニタリー群と呼ばれることもある。簡単な計算で次がわかる。

補助定理 3.3. X をコンパクト *Hausdorff* 空間とする。このとき

$$\mathrm{ext}\, C(X)_1 = U_{C(X)}$$

である。

以上で準備できたので，Banach-Stone の定理の証明を述べる。

Banach-Stone の定理の証明. 補助定理 3.2,3.3 により，$T(U_{C(X)}) = U_{C(Y)}$ である。したがって，$T(1)$ はユニタリー関数である。そこで与えられた T に対して $\overline{T(1)}T$ を考えることにより，初めから $T(1) = 1$ として一般性を失わない。次に，任意の $u \in C_{\mathbb{R}}(X)$ (X 上の実数値連続関数全体) と任意の実数 t に対して $\exp(itu) \in U_{C(X)}$ なので，$T(\exp(itu)) \in U_{C(Y)}$ である。T の複素線形性と連続性により

$$T(\exp(itu)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n T(u^n)}{n!} \in U_{C(Y)}$$

であるから

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n T(u^n)}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n \overline{T(u^n)}}{n!} = 1 \tag{3.2}$$

である。$T(1) = 1$ としたことを考慮して，式 (3.2) の t の 1 次の項を両辺比較して，

$$T(u) = \overline{T(u)}$$

がわかる。ここで $u \in C_{\mathbb{R}}(X)$ はなんでもよかったので $T(u^2) = \overline{T(u^2)}$ でもあることもわかる。このことを考慮して式 (3.2) の t の 2 次の項を比較すると，

$$\frac{i^2 T(u^2)}{2!} + \frac{iT(u)}{1!} \frac{-iT(u)}{1!} + \frac{(-i)^2 T(u^2)}{2!} = 0$$

である。したがって，

$$T(u^2) = T(u)^2$$

がわかる。T の線形性から，任意の $u, v \in C_{\mathbb{R}}(V)$ に対して

$$T(uv) = \frac{1}{2}\left(T((u+v)^2 - u^2 - v - 2\right) = \frac{1}{2}\left(T(u+v)^2 - T(u)^2 - T(v)^2\right) = T(u)T(v)$$

が成り立つ。T の複素線形性を考慮して，$T(fg) = T(f)T(g)$ が任意の $f, g \in C(X)$ に対して成立することがわかる。以上から，$T : C(X) \to C(Y)$ は多元環としての同型写像である。補助定理 3.1 より同相写像 $\varphi : Y \to X$ が存在して，$T(f) = f \circ \varphi$, $f \in C(X)$ であるが，特に $T(1) = 1$ を仮定した議論を行ってきたことを考慮して，一般には

$$T(f) = T(1) f \circ \varphi, \quad f \in C(X)$$

が成り立つことがわかる。

□

4　Schur の定理

行列環の間のユニタリー群を保存する写像についての Marcus の定理 [39] をもちいて行列環上の等距離写像に関する Schur の定理を導くことができる。複素数係数 n 次正方行列全体のバナッハ環（ノルムはスペクトルノルム）を $M_n(\mathbb{C})$ で表す。ユニタリー行列全体を $U_{M_n(\mathbb{C})}$ であらわし，ユニタリー群という。

Marcus の定理 . 複素線形写像 $\Phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ が $\Phi(U_{M_n(\mathbb{C})}) \subset U_{M_n(\mathbb{C})}$ をみたすとする。このとき，$U, V \in U_{M_n(\mathbb{C})}$ が存在して

$$\Phi(A) = UAV, \quad A \in M_n(\mathbb{C}),$$

または

$$\Phi(A) = UA^tV, \quad A \in M_n(\mathbb{C})$$

が成り立つ。ここで，A^t は A の転置行列を表す。

行列環 $M_n(\mathbb{C})$ の閉単位球の端点は次のようである。

補助定理 4.1. $\operatorname{ext} M_n(\mathbb{C})_1 = U_{M_n(\mathbb{C})}$; ユニタリー行列全体

証明. まずユニタリー行列 U は端点であることを証明する。$U = \frac{1}{2}(A+B)$, $\|A\| \leq 1$, $\|B\| \leq 1$ とする。ユニタリー行列 V が存在して V^*UV は対角行列である。このとき V^*UV の対角成分はすべて絶対値が 1 である複素数である。さらに $V^*UV = \frac{1}{2}(V^*AV + V^*BV)$ である。$\|V^*AV\| = \|A\| \leq 1$, $\|V^*BV\| = \|B\| \leq 1$ なので V^*AV の対角成分の絶対値も V^*BV の対角成分の絶対値も 1 以下である。すると $V^*UV = \frac{1}{2}V^*AV + V^*BV$ な

ので V^*UV, V^*AV, V^*BV の対角成分は順番も含めて一致している。V^*AV の対角成分以外の成分は 0 である。実際，もし V^*AV の (i,j) 成分（ただし $i \neq j$）a_{ij} が 0 でないとすると第 j 成分のみが 1 で，他の成分が 0 であるベクトル v に対して $\|v\| = 1$ であるが，$\|V^*AVv\| \geq \sqrt{1+|a_{ij}|^2}$ であるので，$\|V^*AV\| \leq 1$ であることに矛盾する。したがって V^*AV の対角成分以外の成分はすべて 0 である V^*BV についても同様である。以上より $V^*UV = V^*AV = V^*BV$ であるから $U = A = B$ である。つまり U は閉単位球の端点である。

逆に $M \in M_n(\mathbb{C})_1$ がユニタリー行列でないとする。$M = UP$ と右極分解する; U がユニタリーである。M がユニタリー行列でないので P は単位行列ではない。また,，P は半正定値行列であり，$\|P^2\| \leq \|P\|^2 = \|M\|^2 \leq 1$ なので，$1 - P^2$ は半正定値である。そこで $V = P + i\sqrt{1-P^2}$ とおくと V はユニタリー行列であり，P の半正定値性と P が単位行列でないことから P^2 も単位行列ではないので $V^* = P - i\sqrt{1-P^2} \neq V$ である。$P = V + V^*$ より $M = UV + UV^*$ であるが，$UV, UV^* \in M_n(\mathbb{C})_1$ であり $UV \neq UV^*$ なので M は $M_n(\mathbb{C})_1$ の端点ではない。

□

行列環上の等距離写像は次のようである。行列環 $M_n(\mathbb{C})$ が有限次元であるため，全射性の仮定は必要ない。

Schur の定理．$T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ を複素線形等距離写像とする。このとき，ユニタリー行列 U と V が存在して

$$T(A) = UAV, \quad A \in M_n(\mathbb{C}) \tag{4.1}$$

か

$$T(A) = UA^tV, \quad A \in M_n(\mathbb{C}) \tag{4.2}$$

である。逆に (4.1) または (4.2) で与えられる写像 $T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ は全射複素線形等距離写像である。

証明. $T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ を複素線形等距離写像とする。$M_n(\mathbb{C})$ は有限次元線形空間で，T は単射（等距離写像は単射！）なので，T は自動的に全射である。補助定理 3.2, 4.1 により，$T(U_{M_n(\mathbb{C})}) = U_{M_n(\mathbb{C})}$ である。すると Marcus の定理によって結論が得られる。

□

5　単位的 C^* 環のユニタリー群を保存する写像

3 章と 4 章では，等距離写像の問題をユニタリー群を保存する写像に関する保存問題として扱う方法を述べた。コンパクト Hausdorff 空間上の複素数値連続関数全体からなる

Banach$*$ 環 $C(X)$ は単位的（可換）C^* 環である。Gelfand-Naimark の定理はこの逆を主張する。つまり単位的可換 C^* 環 A に対して，A と $C(M_A)$ は等距離 $*$ 同形である。ここで，M_A は A の極大イデアル空間である。そこで以下で単位的可換 C^* 環は $C(X)$ で表すこともある。

3 章と 4 章では，単位的可換 C^* 環や行列環上の全射複素線形等距離写像を扱い，それはユニタリー群を保存することに着目して形を決定できた。可換ではない単位的 C^* 環に対する等距離写像の問題も，ユニタリー群を保存する写像の問題として扱うことができないだろうか？実際，Kadison の定理 [30] はそのような方向で証明できる。この章で詳述する。

5.1　ユニタリー群を保存する写像

まず，単位的 C^* 環の間のユニタリー群を保存する複素線形写像を記述しよう。単位的 C^* 環 A に対して，そのユニタリー元全体を A のユニタリー群といい，U_A であらわそう。

定義 5.1. A と B を単位的 C^* 環とする。複素線形写像 $\Phi : A \to B$ が積（*resp. 2* 乗）を保存する（$\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$, $a, b \in A$（*resp.* $\Phi(a^2) = \Phi(a)^2$, $a \in A$））とき，Φ は準同形写像（*resp. Jordan-*準同形写像）とよばれる。さらに対合 $*$ を保存する（$\Phi(a^*) = \Phi(a)^*$, $a \in A$）とき Φ は $*$ 準同形写像（*resp. Jordan* $*$ 準同形写像）とよばれる。

次は Marcus の定理の拡張であり，よく知られていると考えているが，直接述べてある文献を見つけられなかったので，証明も詳しく書いてみる。証明の根本は，3 章で与えたユニタリー保存性に基づく Banach-Stone の定理の証明のものと同じである。

定理 5.1. A と B を単位的 C^* 環とする。$\Phi : A \to B$ を複素線形写像で $\Phi(U_A) \subset U_B$ とする。このとき $\Phi(1) \in U_B$ であり，*Jordan* $*$-準同形写像　$J : A \to B$ が存在して

$$\Phi(a) = \Phi(1)J(a), \quad a \in A$$

である。

証明. まず Φ が有界であることを示す。$u \in U_A$ とすると，$\Phi(u) \in U_B$ なので $\|\Phi(u)\| = 1$ である。次に $a \in A$ を自己共役とする。さらに $\|a\| \leq 1$ として一般性を失わないのでそうする。すると任意の $x \in H$ に対して $(a^2x, x) = (ax, ax) = \|ax\|^2 \geq 0$ なので $a^2 \geq 0$ である。また $1 - a^2 \geq 0$ であることが $\|a\| \leq 1$ よりわかる。実際，$\|a\| \leq 1$ より

$$((1 - a^2)x, x) = (x, x) - (ax, ax) = \|x\|^2 - \|ax\|^2 \leq \|x\|^2 - \|a\|^2\|x\|^2 \geq 0$$

が任意の $x \in H$ に対して成立する。したがって $\sqrt{1 - a^2} \in A$ である。そこで $u = a + \sqrt{1 - a^2}$ と定めると $u^* = a - \sqrt{1 - a^2}$ であり，$\sqrt{1 - a^2}$ は $1 - a^2$ の多項式で近似でき，したがって a と可換であることから，$u^*u = uu^* = 1$ がわかる；u は，したがって u^* もユニタリーで

ある。また $a=u+u^*$ なので $\|\Phi(a)\| \leq \|\Phi(u)\| + \|\Phi(u^*)\| \leq 2$ である。よって一般に自己共役 $a \in A$ に対して $\|\Phi(a)\| \leq 2\|a\|$ である。

最後に任意の $a \in A$ に対して $a = \frac{a+a^*}{2} + i\frac{a-a^*}{2i}$ であり $\frac{a+a^*}{2}$ も $\frac{a-a^*}{2i}$ も自己共役であるから

$$\|\Phi(a)\| \leq \left\|\Phi\left(\frac{a+a^*}{2}\right)\right\| + \left\|\Phi\left(\frac{a-a^*}{2i}\right)\right\| \leq \|a+a^*\| + \|a-a^*\| \leq 4\|a\|$$

である。

Φ がユニタリーを保存するので $\Phi(1) \in U_B$ である。すると $\Phi_0 = \Phi(1)^*\Phi : A \to B$ は有界であり，$\Phi_0(U_A) \subset U_B$ であり $\Phi_0(1) = 1$ である。

Φ_0 が Jordan $*$-準同形写像であることを示せばよい。そこで自己共役 $a \in A$ を任意にとり固定する。$\exp(ita) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ita)^n}{n!}$ とすると無限級数は任意の実数 $t \in \mathbb{R}$ について A の元に収束する。また $*$ 演算の連続性から $(\exp(ita))^* = \exp(-ita)$ であり

$$(\exp(ita))^* \exp(ita) = \exp(-ita)\exp(ita) = 1 = (\exp(ita))(\exp(ita))^*$$

であるからすべての実数 t について $\exp(ita) \in U_A$ である。Φ_0 が $\Phi_0(U_A) \subset U_B$ である有界線形作用素であり $\Phi_0(1) = 1$ なので

$$\Phi_0(\exp(ita)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n \Phi_0(a^n)}{n!} \in U_B$$

である。$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n\Phi_0(a^n)}{n!}\right)^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n\Phi_0(a^n)^*}{n!}$ なので

$$1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n \Phi_0(a^n)^*}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n \Phi_0(a^n)}{n!}\right) \tag{5.1}$$

がすべての実数 t に対して成立する。そこで t の 1 次の係数を比較すると，

$$0 = -i\Phi_0(a)^* + i\Phi_0(a)$$

が分かるので，$\Phi_0(a)^* = \Phi_0(a)$ である。この式が任意の自己共役 $a \in A$ に対して成立する。a が自己共役であると任意の自然数 n に対して a^n も自己共役である。したがって $\Phi_0(a^n)^* = \Phi_0(a^n)$ である。よって (5.1) より

$$1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n \Phi_0(a^n)}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n \Phi_0(a^n)}{n!}\right) \tag{5.2}$$

がすべての実数 t に対して成立する。(5.1) において t の 2 次の係数を比較すると

$$0 = \frac{i^2\Phi_0(a^2)}{2!} + (-i)i\Phi_0(a)\Phi_0(a) + \frac{(-i)^2\Phi_0(a^2)}{2!}$$

である。したがって

$$\Phi_0(a^2) = \Phi_0(a)^2$$

が成り立つ。

次に 2 つの自己共役 $a, b \in A$ に対して $a+b$ も自己共役なので

$$\begin{aligned}\Phi_0(a)^2 + \Phi_0(a)\Phi_0(b) + \Phi_0(b)\Phi_0(a) + \Phi_0(b)^2 &= (\Phi_0(a) + \Phi_0(b))^2 = (\Phi_0(a+b))^2 \\ &= \Phi_0((a+b)^2) = \Phi_0(a^2ab + ba + b^2) = \Phi_0(a)^2 + \Phi_0(ab+ba) + \Phi_0(b)^2\end{aligned}$$

であるから

$$\Phi_0(a)\Phi_0(b) + \Phi_0(b)\Phi_0(a) = \Phi_0(ab+ba) \tag{5.3}$$

が成り立つ。

最後に $a \in A$ を任意にとると $a = b + ic$, $b = (a+a^*)/2$, $c = (a-a^*)/2i$ と表すことができる。すると b, c は自己共役であるから (5.3) より

$$\begin{aligned}\Phi_0(a^2) &= \Phi_0(b^2 - c^2 + i(bc+cb)) \\ &= \Phi_0(b)^2 - \Phi_0(c)^2 + i\left(\Phi_0(b)\Phi_0(c) + \Phi_0(c)\Phi_0(b)\right) \\ &= \left(\Phi_0(b) + i\Phi_0(c)\right)^2 = \Phi_0(a)^2\end{aligned}$$

である。

□

定理 5.1 の系として Banach-Stone の定理が直ちに従う。また行列環は素環（prime ring）なので Herstein の定理 [27] より Jordan 同形写像は同形写像か反同形写像であり，Noether-Skolem の定理により同形写像の形が決まる。したがって，定理 5.1 から Schur の定理も従う。

5.2 Kadison の定理

単位的 C^* 環の間の等距離写像を記述した Kadison の定理 [30] について述べる。行列環 $M_n(\mathbb{C})$ の閉単位球の端点 (extreme point) はユニタリー行列全体と一致するので定理 5.1 は Schur の定理に応用できる。$B(H)$ の場合も含めて C^* の閉単位球の端点はユニタリーだけではないことがよく知られている（cf. [12, 30]）が，全射複素線形等距離写像がユニタリーを保存することは簡単に分かる（cf. [12, Lemma 6.2.4]）。従って，定理 5.1 から Kadison の定理が直ちに従う！

Kadison の定理． A と B と単位的 C^* 環とする。$\Phi : A \to B$ を線形全射等距離写像とする。このとき $\Phi(1) \in U_B$ であり，A から B の上への *Jordan∗* 同形写像 J が存在して $\Phi = \Phi(1)J$ である。逆に $u \in U_B$ と A から B の上への *Jordan∗* 同形写像 J に対して，$\Phi = uJ$ で $\Phi : A \to B$ を定めると，Φ は線形全射等距離写像である。

6 Nagasawa の定理

ユニタリー群を保存する写像を記述することにより，Banch-Stone の定理と Schur の定理，そして一般に Kadison の定理を証明した。単位的 C^* 環の場合には，全射複素線形等距離写像が積や Jordan 積に言及することをユニタリー群の保存性に帰着できた。単位的 C^* 環にはユニタリーが潤沢に存在し，ユニタリー群は積の構造と密接なので，それを保存する等距離写像が積に言及することにはそれなりの説得力はある。しかし，一般のバナッハ環にはユニタリーが十分にあるとは言えないなかで，バナッハ環の間の等距離写像が積や Jordan 積の構造に言及する理由が明確になったとは言い切れない気がする。正則関数のつくるバナッハ環では定数関数のみがユニタリーであるが，そのような空間上の等距離写像もやはり積の構造を保存する。典型的な例として Nagasawa の定理を紹介する。

Banach-Stone の定理の帰結である写像の形を荷重合成作用素という。単位的可換 C^* 環とは限らない連続関数からなるバナッハ環や Banach 空間の間の等距離写像が荷重合成作用素となるかという問題意識のもと多くの研究がなされている。関数環の間の全射等距離写像は荷重合成作用素であることは Nagasawa の定理 [46] として知られている。単位的可換 C^* 環は関数環なので，Nagasawa の定理は Banach-Stone の定理を関数環の場合に拡張した定理ともいえる。

Nagasawa の定理． T を関数環 A から関数環 B の上への複素線形等距離写像であるとする。このとき，$T(1)$ は絶対値が 1 である可逆関数であり，$\frac{T}{T(1)}$ は A から B への多元環としての同形写像である。

Gelfand 理論により，A から B への多元環としての同形写像は極大イデアル空間上の合成作用素で表現できるので，Nagasawa の定理は関数環の間の全射複素線形等距離写像は荷重合成作用素であることを主張している。de Leeuw, Rudin and Wermer [10] は独立に同様の結果をえた。Nagasawa の定理と同様に，単位円板 D 上のハーディー空間 $H^\infty(D)$ の等距離写像の問題に応用した。また [10] では，ハーディー空間 $H^1(D)$ 上の全射複素線形等距離写像の形も決定された。ほどなくして Forelli [14] は $H^p(D)$ 上の全射とは限らない複素線形等距離写像を扱った。その後，正則関数の空間上の複素線形等距離写像の研究が盛んに行われるようになった。

Miura [41] (cf. [22]) は単位元の仮定のない ”関数環 ” の場合に全射実線形等距離写像を決定し，Nagasawa の定理を拡張した。

7 連続関数からなるバナッハ環上の等距離写像

整数全体を $\mathbb{Z}$ とする。複素平面上の単位円周を $\mathbb{T}$ とし，その上の複素数値連続関数でフーリエ級数が絶対収束するようなもの全体

$$W(\mathbb{T}) = \{f \in C(\mathbb{T}) : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| <\}$$

にノルム $\|f\|_W = \sum |\hat{f}(n)|$ をノルムとしたバナッハ環は Wiener 環とよばれる単位的半単純可換バナッハ環である。Wiener 環は数列空間 $\ell^1(\mathbb{Z})$ の Fourier 変換あるいは Gelfand 変換と考えることができる。Wiener 環の閉部分環

$$W_+(\mathbb{T}) = \{f \in W(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0, \forall n < 0\}$$

は $W(\mathbb{T})$ とバナッハ空間として等距離同形である。実際 $\tau : \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\} \to \mathbb{Z}$ を全単射として $T : W(\mathbb{T}) \to W_+(\mathbb{T})$ を，$f \in W(\mathbb{T})$ に対して $T(f)(z) = \sum_{n \geq 0} \hat{f}(n) z^{\tau(n)}$ により定めると T は全射複素線形等距離写像である。一方 $W(\mathbb{T})$ の極大イデアル空間は $\mathbb{T}$ であり，$W_+(\mathbb{T})$ のそれは単位閉円板 $\bar{D}$ であり両者は同相ではないから，$W(\mathbb{T})$ と $W_+(\mathbb{T})$ はバナッハ環として同形ではない。このように「バナッハ空間として等距離同形 $\longrightarrow$ バナッハ環としてあるいは Jordan バナッハ環として同形」は，一般には望めないことがわかる。前章までに見たように，単位的 C^* 環（実は単位元の仮定はいらない [52]），関数環は「バナッハ空間として等距離同形 $\longrightarrow$ バナッハ環としてあるいは Jordan バナッハ環として同形」をみたすバナッハ環である。このような性質をもつバナッハ環は多くはないように考えられる。可換の場合においては，Jarosz による研究 [28] や Jarosz and Pathak [29] の研究がある。

7.1 Jarosz の定理

Jarosz [28] は単位元を保存する全射複素線形等距離写像が多元環としての同形写像であるような半単純可換バナッハ環をそのノルムの特徴に着眼することにより研究してる。それは，Nagasawa [46] による関数環，de Leeuw [9] による Lipschitz 環，さらに Cambern [5]，Rao and Roy [54] による Lipschitz 環，連続微分関数の環，絶対連続関数の環などの研究をうけて，連続関数のバナッハ環やバナッハ空間上の等距離写像をあつかったものであり，本稿のテーマでもある「バナッハ空間として等距離同形 $\longrightarrow$ バナッハ環としてあるいは Jordan バナッハ環として同形」を抽象的に扱った先駆的な論文である。

定義 7.1. *2* 次元空間 $\mathbb{R}^2$ 上のノルム p で $p((1,0)) = 1$ をみたすもの全体を $\mathcal{P}$ とおく。$p \in \mathcal{P}$ に対して

$$D(p) = \lim_{t \to +0} (p(1,t) - 1)/t$$

と定める。

任意の $p \in \mathcal{P}$ に対して $D(p)$ は有限の値として存在することは [26] で示されている。

定義 7.2. コンパクト *Hausdorff* 空間 X に対して，A を $C(X)$ の複素線形部分空間で定数関数を含むものとする。空間 A 上の半ノルム（*seminorm*）$|||\cdot|||$ が $|||a+1||| = |||a|||$ $(a \in A)$ をみたすとき，$|||\cdot|||$ は 1-不変であるという。ここで 1 は恒等的に実数値 1 をとる関数である。A 上のノルム $\|\cdot\|$ に対して，$p \in \mathcal{P}$ が存在して $\|\cdot\| = p(\|\cdot\|_\infty, |||\cdot|||)$ であるとき，$\|\cdot\|$ を p-ノルムという。ただし，$\|\cdot\|_\infty$ は上限ノルム（*sup norm*）である。

コンパクト Hausdorff 空間 K とする。K 上の複素数値連続関数 f に対して

$$L(f) = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} : x, y \in K,\ x \neq y\right\}$$

を f の Lipschitz 定数とよぶ。Lipschitz 定数が有限であるような f を Lipschitz 関数と呼ぶ。その全体

$$\mathrm{Lip}(K) = \{f \in C(K) : L(f) < \infty\}$$

は単位的可換多元環である。$\mathrm{Lip}(K)$ には多様な完備ノルムが定義できる。

$$\|f\|_{\max} = \max\{\|f\|_\infty, L(f)\}, \quad f \in \mathrm{Lip}(K),$$

$$\|f\|_+ = \|f\|_\infty + L(f), \quad f \in \mathrm{Lip}(K)$$

などはその例である。顕著なこととして，$\mathrm{Lip}(K)$ はノルム $\|\cdot\|_+$（今後，和ノルムと呼ぶ）に関して単位的半単純可換バナッハ環であり，その極大イデアル空間は K であることが知られている。そこで $(\mathrm{Lip}(K), \|\cdot\|_+)$（単に，$\mathrm{Lip}(K)$ と省略することもある）を Lipschitz 環と呼ぶ。和ノルムは，$p(x,y) = |x| + |y|$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して，p-ノルムである。max ノルム（$\|\cdot\|_{\max}$ をそう呼ぶことにする）も $p(x,y) = \max\{|x|, |y|\}$ に対する p-ノルムであり，$D(p) = 0$ である。max ノルムは K が 2 点以上からなる場合は submultiplicative ではないので，その場合は $(\mathrm{Lip}(K), \|\cdot\|_{\max})$ はバナッハ環ではない。

有界閉区間 $[0,1]$ 上の複素数値連続微分可能関数全体からなる単位的可換多元環 $C^1[0,1]$ は，和ノルム

$$\|f\|_+ = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \quad f \in C^1[0,1]$$

により単位的半単純可換バナッハ環であり，その極大イデアル空間は $[0,1]$ である。max ノルム

$$\|f\|_{\max} = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}, \quad f \in C^1[0,1]$$

は $C^1[0,1]$ 上の完備ノルムを与える。max ノルムは submultiplicative ではない。有界閉区間 $[0,1]$ 上の絶対連続関数全体からなる単位的可換多元環にも同様なノルムが定義できるがここでは省略する（[54] など参照のこと）。

Jarosz の定理． コンパクト *Hausdorff* 空間 X と Y に対して，A と B をそれぞれ $C(X)$ と $C(Y)$ の複素線形部分空間で定数関数を含むものとする。また，$p, q \in \mathcal{P}$ とし，$\|\cdot\|_A$ は A 上の p-ノルム，$\|\cdot\|_B$ は B 上の q-ノルムとする。さらに，$T : A \to B$ を $(A, \|\cdot\|_A)$ から $(B, \|\cdot\|_B)$ の上への全射複素線形等距離写像とする。さらに，$T(1) = 1$ とする。このとき，$D(p) = D(q) = 0$ であるか，または A と B が *regular (Jarosz* の用語*)* であるならば，T は上限ノルム（*sup norm*）に関しても等距離写像である。

空間 A が regular であることの定義は [28, p.67] を参照のこと。A が単位的半単純可換バナッハ環であり，X が極大イデアル空間であるならば，A は regular である。したがって

系 7.1. A, B を，それぞれある $p, q \in \mathcal{P}$ に対する p-ノルム，q-ノルムによる単位的半単純可換バナッハ環で X, Y がそれぞれ A, B の極大イデアル空間であるとする。このとき，$T(1) = 1$ であるような $(A, \|\cdot\|_A)$ から $(B, \|\cdot\|_B)$ の上への全射複素線形等距離写像 T に対して，同相写像 $\varphi : Y \to X$ が存在して

$$T(f) = f \circ \varphi, \qquad f \in A$$

が成り立つ。特に，A と B はバナッハ環として等距離同形である。

証明. Jarosz の定理から T は上限ノルムに関する等距離写像である。したがって，T は A の一様閉包 $\bar{A}$ から B の一様閉包 $\bar{B}$ の上への上限ノルムに関する全射等距離写像 $\tilde{T}$ に拡張できる。すると Nagasawa の定理により $\tilde{T}$ は多元環としての同形写像である。よって，その A への制限 $T : A \to B$ は多元環としての同形写像である。すると Gelfand 理論により，該当の $\varphi : Y \to X$ の存在がわかる。

□

Jarosz の定理における条件 $T(1) = 1$ は本質的である。Weaver [61, p.242] は Lipschitz 関数からなる多元環に，いわゆる max norm をいれたバナッハ空間上の全射複素線形等距離写像でについて上限ノルムに関して等距離でないもので，荷重合成作用素でない例を示している ([62, p.61] にも同じ例がある)。

Jarosz の定理と [28, Lemma 2] の原証明は，興味深く明快なアイディアによるものである。証明の方針変更などは必要はないが，議論に対する多少の修正により読みやすくなると思う。詳細は [19] にある。

7.2 Lipschitz 環上の等距離写像と Rao and Roy の問題

Lipschitz 環上の等距離写像の研究は de Leeuw [9] に始まり，Cambern [5]， Rao and Roy [54] により引き継がれると同時に連続微分可能関数のバナッハ環や絶対連続関数のバナッハ環の研究も開始され，現在に至るまで多くの数学者により多様な研究がなされている。

Rao and Roy [54] は単位閉区間 $[0,1]$ 上の関数からなる多元環 $\mathrm{Lip}[0,1]$, $C^1[0,1]$ と絶対連続関数全体 $\mathrm{AC}[0,1]$ 上の等距離写像を研究した。集合の包含関係としては $C^1[0,1] \subset \mathrm{Lip}[0,1] \subset \mathrm{AC}[0,1]$ であり，$f \in \mathrm{AC}[0,1]$ (resp. $\mathrm{Lip}[0,1]$, $C^1[0,1]$) について $f' \in L^1[0,1]$ (resp. $L^\infty[0,1]$, $C[0,1]$) である。主なノルムは $\|f\|_\infty + \|f'\|_1$, $f \in \mathrm{AC}[0,1]$ (resp. $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, $f \in \mathrm{Lip}[0,1], C^[0,1]$) である。全射複素線形等距離写像は荷重合成作用素であることが示されている。多元環 $\mathrm{AC}[0,1]$，$\mathrm{Lip}[0,1]$，$C^1[0,1]$ はこの和ノルムに関して単位的半単純可換バナッハ環であり，その上の全射複素線形等距離写像は荷重合成作用素であることが示されている。さらに，簡単な計算により，$L(f) = \|f\|_\infty$, $f \in \mathrm{Lip}[0,1]$ であること

から，コンパクト距離空間 K に対して $(\mathrm{Lip}(K), \|\cdot\|_+)$ 上の全射複素線形等距離写像が K 上の等距離写像を用いて記述できるかどうかを問題として取り上げた。

Jarosz and Pathak は，Rao and Roy の問題に対して肯定的な”解”を示した [29, Example 8]。そこではコンパクト距離空間 K_j $(j = 1, 2)$ に対して $\mathrm{Lip}(K_1)$ から $\mathrm{Lip}(K_2)$ の上への全射複素線形等距離写像 T に対して $T(1)$ が絶対値 1 の複素数であることを示すことが肝要であった。$|T(1)| = 1$ が示されてしまえば，$\overline{T(1)}T$ に対して [29, Theorem 4]（cf. [28, Theorem]）を適用して，T が K 上の等距離写像に関する荷重合成作用素であることが証明できる。$|T(1)| = 1$ を示すために [29, Example 8] では $\mathrm{Lip}(K_j)$ の双対空間の単位球の端点（extreme point）を調べているが，その過程には確認できない箇所があり，Jarosz and Pathak の解答は不完全であるとされた（cf. [24, pp.152–153]）。和ノルムを定めた $\mathrm{Lip}(K_j)$ の双対空間の単位球の端点の全容は，現在でも，少なくとも直接的な把握は筆者にはできていない。Hatori and Oi [24] は，ある種の ” ベクトル値バナッハ環 ” 上の全射複素線形等距離写像の形を決定した（cf. [19]）。 その際に，Choquet 理論を用いて双対空間の単位球の端点の一部分を解析し，$|T(1)| = 1$ に当たる等式を示した。結果として Rao and Roy の問題を最終的に肯定的に解決した。その過程で用いた Jarosz の定理 [28, Theorem] の証明の修正は [19] で詳しく述べられている。また，[19] では合成写像部分が BJ 型であることの Lumer’s method による証明も示してある。

7.3　単位的可換 C^* 環に値をとる写像からなるバナッハ環とその上の等距離写像

Nikou and O’Farrell [47] はベクトル値写像からなるある種のバナッハ環を適切四つ組とよんだ（[25] の Def.2.2 の直後のコメントも参照のこと）。Hatori and Oi [24] は単位的可換 C^* 環に値をとる写像からなるバナッハ環でいくつかの条件をみたすものを L 型適切四つ組と定義した [24, Definition 4]。L 型適切四つ組は，Nikou and O’Farrell の適切四つ組の特別なものである。和ノルムをもつ Lipschitz 環，単位的可換 C^* 環に値をとる Lipschitz 写像からなる和ノルムに関するバナッハ環，連続的微分可能関数全体の和ノルムに関するバナッハ環，単位的可換 C^* 環に値をとる連続的微分可能写像全体の和ノルムに関するバナッハ環などは L 型適切四つ組の例である。L 型適切四つ組上の全射複素線形等距離写像は [24, Theorem 8] で決定された。それより少し一般的なバナッハ環（自然な $C(Y)$ 値化）に対する定理を [19, Theorem 14] で述べた。どちらの定理からも Rao and Roy の問題の解答が導かれる。前者が L 型適切四つ組に限って述べた理由は，等距離写像を荷重合成作用素で表現する際に合成作用素部分が BJ 型であることの証明に，適切四つ組の間の準同形写像を記述した [25, Proposition 3.2] を用いたためである。荷重合成作用素の表現について，[19, Theorem 14] の証明では，Lumer’s method を用いた証明を与えた。L 型適切四つ組や自然な $C(Y)$ 値化は，$C(Y)$ に値をとる Lipschitz 写像全体 $\mathrm{Lip}(K, C(Y))$ や $C(Y)$ に値をとる連続的微分可能関数からなるバナッハ環 $C^1([0,1], C(Y))$，$C^1(\mathbb{T}, C(Y))$ をモデルに抽象化したバナッハ環である。コンパクト Hausdorff 空間 Y が 1 点集合の場合

を考えれば，$\mathrm{Lip}(K)$, $C^1[0,1]$，$C^1(\mathbb{T})$ の抽象化と考えることもできる。

Rao and Roy の問題の解答は [24, Theorem 8] で与えられたが，その後改良された [19, Theorem 14] の方が多少読みやすいはずなので，ここではそちらを採録する。

定義 7.3 ([19] の Definition 12)**.** X と Y をコンパクト *Hausdorff* 空間とする。B を $C(X)$ の単位元を含む部分環で X の点を分離するとし（$\forall x, y \in X$ に対して，$f(x) \neq f(y)$ であるような $f \in B$ が存在する），それ自身（何らかのノルムに関して）バナッハ環であるとする。$\widetilde{B}$ は $C(X \times Y)$ の単位元を含む部分環で，$B \otimes C(Y) \subset \widetilde{B}$ であり，それ自身がバナッハ環であるとする。さらに $X \times Y$ が $\widetilde{B}$ の極大イデアル空間であり，$\widetilde{B}$ は複素共役（$f \in \widetilde{B}$ ならば $\bar{f} \in \widetilde{B}$）とする。さらに，つぎの条件が成り立つとき $\widetilde{B}$ は B の自然な $C(Y)$ 値化であるという：条件）コンパクト *Hausdorff* 空間 $\mathfrak{M}$ と複素線形写像 $D : \widetilde{B} \to C(\mathfrak{M})$ で，$\ker D = 1 \otimes C(Y)$ かつ $D(C_{\mathbb{R}}(X \times Y) \cap \widetilde{B}) \subset C_{\mathbb{R}}(\mathfrak{M})$ が成り立ち，ノルムの条件

$$\|F\|_{\widetilde{B}} = \|F\|_{\infty(X \times Y)} + \|D(F)\|_{\infty(\mathfrak{M})}, \quad F \in \widetilde{B}$$

をみたす。

単位的な半単純可換バナッハ環の Gelfand 変換は上の定義の B の条件をみたす。

定理 7.2 ([19] の Theorem 14)**.** コンパクト *Hausdorff* 空間 X_j（$j = 1, 2$）に対して，B_j は $C(X_j)$ の単位元を含む部分環で X_j の点を分離するとし，それ自身（何らかのノルムに関して）バナッハ環であるとする。$\widetilde{B_j}$ を B_j の自然な $C(Y_j)$ 値化であるとする。任意の $F \in \widetilde{B_j}$ と，Y_j 上で $|h| = 1$ である任意の $h \in C(Y_j)$ に対して，

$$\|(1 \otimes h)F\|_{\widetilde{B_j}} = \|F\|_{\widetilde{B_j}}$$

が成り立つとする。このとき，$T : \widetilde{B_1} \to \widetilde{B_2}$ を全射複素線形等距離写像とする。すると，Y_2 上 $|h| = 1$ である $h \in C(Y_2)$ と，連続写像 $\varphi : X_2 \times Y_2 \to X_1$ で任意の $y \in Y_2$ に対して $\varphi(\cdot, y) : X_2 \to X_1$ が同相写像であるものと，同相写像 $\tau : Y_2 \to Y_1$ が存在して，

$$T(F)(x, y) = h(y)F(\varphi(x, y), \tau(y)), \quad (x, y) \in X_2 \times Y_2$$

が任意の $F \in \widetilde{B_1}$ に対して成立する。

証明などについては [24] と [19] を参照されたい。

B_j を Lipschitz 環とし定理 7.2 を適用すると次のようである。

系 7.3. コンパクト距離空間 K_j（$j = 1, 2$）とコンパクト *Hausdorff* 空間 Y_j（$j = 1, 2$）に対して，K_j 上の $C(Y_j)$ 値 *Lipschitz* 写像全体に和ノルムを定めたバナッハ環を $\mathrm{Lip}(K_j, C(Y_j))$ とする。この時，$T : \mathrm{Lip}(K_1, C(Y_1)) \to \mathrm{Lip}(K_2, C(Y_2))$ を全射複素線形等距離写像とする。すると，Y_2 上 $|h| = 1$ である $h \in C(Y_2)$ と，連続写像 $\varphi : X_2 \times Y_2 \to X_1$ で任意の $y \in Y_2$ に対して $\varphi(\cdot, y) : X_2 \to X_1$ が全射等距離写像であるものと，同相写像 $\tau : Y_2 \to Y_1$ が存在して，

$$T(F)(x, y) = h(y)F(\varphi(x, y), \tau(y)), \quad (x, y) \in X_2 \times Y_2$$

が任意の $F \in \mathrm{Lip}(K_1, C(Y_1))$ に対して成立する。

定理 7.2 を適用すれば，$y \in Y_2$ に対して $\varphi(\cdot, y) : X_2 \to X_1$ が全射等距離写像であること以外の部分は証明できる。任意の $y \in Y_2$ に対して $\varphi(\cdot, y) : X_2 \to X_1$ が全射等距離写像であることは，対象が Lipschitz 環であるという特殊事情により証明できる。

また系 7.3 においてコンパクト Hausdorff 空間 Y_j を 1 点からなるものとすると，$C(Y_j)$ と複素数全体 $\mathbb{C}$ はバナッハ環として等距離同形であることから $\mathrm{Lip}(K_j)$ と $\mathrm{Lip}(K_j, C(Y_j))$ はバナッハ環として等距離同形であり，次が成立することがわかる。Rao and Roy の問題に対する解である。

系 7.4. コンパクト距離空間 X_j（$j = 1, 2$）に対して，X_j 上の複素数値 *Lipschitz* 関数全体 $\mathrm{Lip}(X_j)$ に和ノルム $\|\cdot\|_\infty + L(\cdot)$ を定める。この時，全射複素線形等距離写像を $T : \mathrm{Lip}(X_1) \to \mathrm{Lip}(X_2)$ とする。すると，$|T(1)| = 1$ であり，さらに全射等距離写像 $\varphi : X_2 \to X_1$ が存在して，

$$T(f) = T(1) f \circ \varphi, \qquad f \in \mathrm{Lip}(X_1)$$

が成り立つ。

全射複素線形等距離写像 $T : C^1([0,1], C(Y_1)) \to C^1([0,1], C(Y_2))$ の形も定理 7.2 により次のようである：$|h| = 1$ である $h \in C(Y_2)$ が存在し，同相写像 $\varphi : [0,1] \times Y_2 \to [0,1] \times Y_1$ と $\tau : Y_2 \to Y_1$ が存在して，任意の $y \in Y_2$ に対して $\varphi(t, y) = t$, $t \in [0,1]$，または $\varphi(t, y) = 1 - t$, $t \in [0,1]$ であり，

$$T(F)(t, y) = h(y) F(\varphi(t, y), \tau(y)), \quad (t, y) \in [0,1] \times Y_2$$

が任意の $F \in C^1([0,1], C(Y_1))$ に対して成立する [24, Corollary 18]。 特に Y_j が 1 点集合である場合は Rao and Roy の結果 [54, Theorem 4.1] である。また $\mathbb{T}$ を単位円周としたとき $C^1(\mathbb{T}, C(Y_j))$ 上の全射複素線形等距離写像についても同様の結果が定理 7.2 より導かれる（cf. [24, Corollary 19]）。

Lipschitz 環や連続微分可能関数全体には，和ノルム以外にも max ノルムはじめバナッハ空間としてのノルムがある。そのようなノルムに関する等距離写像の研究も多数なされている（cf. [4, 33, 34, 35, 36, 43]）。

8　最近の話題から

最近は次のような観点からの研究も盛んに行われている。

・等距離写像に線形性（実，複素）を仮定しない：全射等距離写像は Mazur-Ulam の定理により実線形＋定数となるので，実線形性の仮定のもとでの研究もある（cf. [35, 36, 41, 42]）。

・部分集合上の等距離写像：Mankiewicz [38] はノルム空間の連結開集合の間の全射等距離写像がノルム空間全体の等距離写像に拡張できること，したがってそれは実線形＋

定数の形であることを示した。Hatori and Molnár [23] は単位的 C^* 環のユニタリー群の間の等距離写像や正値可逆元全体（positive cone）の間の Thompson 等距離写像を研究した。その後，Positive cone 上の各種の距離による等距離写像の研究が盛んに行われている（[44] やその参考文献を参照されたい）。Tingley 問題 [58] は，ノルム空間の単位球面の間の全射等距離写像はノルム空間全体の等距離写像に拡張するかを問題としている。多くの研究があるが，反例はなく実 2 次元の場合も未解決である。Peralta [53] やその参考文献を参照されたい。特筆すべき最近の結果として Mori and Ozawa [45] がある。単位的 C^* 環の単位球面から任意のバナッハ空間の単位球面の全射等距離写像が等距離写像として全体に拡張することを示した。

・ベクトル値の Lipschitz 環の間の等距離写像の研究において，ベクトルを C^* 環とすることを志向した研究がある。Oi [50] は行列に値をとる写像からなる Lipschitz 環上の 1 を保存する等距離写像を，Lumer's method を用いて決定した。

9　付録１：バナッハ空間としての同形性と等距離同形性

二つのバナッハ空間 $\mathfrak{B}_1$ と $\mathfrak{B}_2$ において全単射な有界線形変換 $S : \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ が存在するとき，$\mathfrak{B}_1$ と $\mathfrak{B}_2$ はバナッハ空間として同形であるという。さらに，S が等距離であるならば，$\mathfrak{B}_1$ と $\mathfrak{B}_2$ は等距離同形であるという。同形性の問題はバナッハ空間の位相構造を研究し，一方等距離同形性の問題はバナッハ空間の幾何構造の違いまで問題にするので，両者は異なる問題意識を背景にしている。

バナッハ空間として同形でも多元環の構造がことなる $C(X)$ と $C(Y)$ の例を一つ上げる。

例 9.1. 通常の位相を $X = \{(x, y) : -1 \le x \le 1, y = 0\} \cup \{(x, y) : x = 0, 0 \le y \le 1\}$ と閉区間 $Y = [-1, 2]$ に入れる。写像 $T : C(X) \to C(Y)$ を，$f \in C(X)$ に対して

$$(T(f))(x) = \begin{cases} f(x, 0), & -1 \le x \le 1 \\ f(0, x-1) - f(0, 0) + f(1, 0), & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

と定める。すると，T は全単射有界線形作用素であり，その作用素ノルムは 3 である。また，X と Y は同相ではないので，*Gelfand* 理論により $C(X)$ と $C(Y)$ は多元環として同形ではない。

10　付録２：Banach の問題と Mazur-Ulam の定理

線形距離空間（Banach の本 [3] では完備線形距離空間を F-space とよぶ）上の全射等距離写像が affine（線形写像＋定数）であるかどうかは，Banach の問題として知られている [3, p.150] (cf. [6, p.94])。有限次元の場合は Charzynski [6] により解決されているが，一般の場合は今日でも未解決であると思われる (cf. [55])。ノルム空間ではない F-space の

例として，Zygmund F-algebra, Privalov class, Smirnov class 等の正則関数のなす空間がある (cf. [20, 59])。

Mazur and Ulam [40] (cf. [3]) は，ノルム空間における点対象移動が距離を 2 倍に伸ばすこと（以下の証明の式 (10.1) の部分が該当）に依存した証明を与えた。Väisälä [60] が別証明を与えたが，この点対称移動の原理を用いている。以下で Väisälä のアイディアに従った証明を述べる。線形距離空間 (V, d) において，$d(2y-x, x) \geq kd(y, x)$ $(x, y \in V)$ をみたす定数 $k > 1$ が存在するような場合は，同様の証明方法でその上の全射等距離写像は affine であることが導かれる (cf. [55, Theorem 2.8])。一般に線形距離空間では上記のような点対象移動の原理は成り立たない。

Mazur-Ulam の定理． g をノルム空間 E からノルム空間 F の上への等距離写像とする。このとき，$g - g(0)$ は実線形写像である。

証明. 次は Väisälä [60] の証明のアイディアによる。

任意の $a, b \in E$ に対して

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{g(a)+g(b)}{2}$$

を示せば十分である。そこで，簡単のため $c = \frac{a+b}{2}$，$c' = \frac{g(a)+g(b)}{2}$ とおく。$\lambda = \|g(c) - c'\|$ とする。$\lambda = 0$ を示す。

$\varphi : E \to E$ を $\varphi(x) = 2c - x$，$\psi : F \to F$ を $\psi(u) = 2c' - u$ により定義すると，φ は等長写像で，$\varphi(c) = c$, $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = a$ であり，

$$\|\varphi(x) - x\| = 2\|x - c\| \quad (x \in E) \tag{10.1}$$

が成り立つ。ψ についても同様の性質が成り立つ。そこで，$h = \varphi \circ g^{-1} \circ \psi \circ g$ と $h : E \to E$ を定めると h は E 上の等長写像である。更に

$$\|\varphi \circ h(x) - y\| = \|\varphi(x) - h(y)\| \tag{10.2}$$

が任意の $x, y \in E$ に対して成り立つことを用いて

$$\|h^{(2^n)}(c) - c\| = 2^{n+1}\lambda$$

が任意の自然数 n に対して成り立つことが分かる。（$n = 1$ のとき：

$$\begin{aligned}\|h(c) - c\| &= \|\varphi \circ g^{-1} \circ \psi \circ g(c) - c\| = \|g^{-1} \circ \psi \circ g(c) - \varphi(c)\| \\ &= \|g^{-1} \circ \psi \circ g(c) - c\| = \|\psi \circ g(c) - g(c)\| = 2\|g(c) - c'\| = 2\lambda\end{aligned}$$

であり，$\|\varphi \circ h(x) - y\| = \|\varphi(x) - h(y)\|$ より

$$\begin{aligned}2^2\lambda = 2\|h(c) - c\| &= \|\varphi \circ h(c) - h(c)\| = \|\varphi(c) - h \circ h(c)\| \\ &= \|c - h \circ h(c)\| = \|h^{(2^1)}(c) - c\|.\end{aligned}$$

n のとき等式

$$2^{n+1}\lambda = \|h^{(2^n)}(c) - c\|$$

が成立したとして $n+1$ のとき：(10.1) と (10.2) を用いて

$$\begin{aligned} 2^{n+2}\lambda &= 2\|h^{(2^n)}(c) - c\| = \|\varphi(h^{(2^n)}(c)) - h^{(2^n)}(c)\| \\ &= \|\varphi(h^{(2^n-1)}(c)) - h^{(2^n+1)}(c)\| = \cdots = \|\varphi(c) - h^{(2^n+2^n)}(c)\| = \|c - h^{(2^{n+1})}(c)\| \end{aligned}$$

である。）一方 $h(a) = a$ であることから $h^{(2^n)}(a) = a$ なので

$$2^{n+1}\lambda = \|h^{(2^n)}(c) - c\| \leq \|h^{(2^n)}(c) - h^{(2^n)}(a)\| + \|a - c\| = 2\|c - a\|$$

が任意の n に対していえるので，$\lambda = 0$ である。

□

References

[1] T. Abe and O. Hatori, *Generalized Gyrovector Spaces and a Mazur-Ulam theorem*, Publ. Math. Debrecen **87** (2015), 393–413

[2] J. Araujo and J. J. Font, *Linear isometries between subspaces of continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **349** (1997), 413–428

[3] S. Banach, *Theory of linear operations*, Translated from the French by F. Jellet. With comments by A. Pełczyński and Cz. Bessaga, North Holland Mathematica Library, **38**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987. x+237 pp.

[4] F. Botelho and J. Jamison, *Surjective isometries on spaces of differentiable vector-valued functions*, Studia Math., **192** (2009), 39–50

[5] M. Cambern, *Isometries of certain Banach algebras*, Studia Math., **25** (1964/65), 217–225

[6] Z. Charzyński, *Sur les transformations isométriques des espaces du type (F)* , Sudia Math., **13** (1953), 94–121.

[7] M. Chasles, Bull. des Sciences Mathematiques de Ferrussae, **XXIV** (1831), 321

[8] J. Coolidge, *A history of geometrical methods*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1940. xviii+451 pp.

[9] K. de Leeuw, *Banach space of Lipschitz functions*, Studia Math., **21** (1961/62), 55–66

[10] K. de Leeuw, W. Rudin and J. Wermer, *The isometries of some function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **11** (1960), 694–698

[11] L. Euler, *Formvlae generales pro translatione qvacvnqve corporvm rigidorvm*, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae pro Anno MDCCLXXV, Tom. **XX** (1776), 189–207

General formulas for any translation of rigid bodies, English translation by Johan Sten

[12] R. J. Fleming and J. E. Jamison, *Isometries on Banach Spaces: Function Spaces*, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 129. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003. x+97 pp.

[13] R. J. Fleming and J. E. Jamison, *Isometries in Banach Spaces. Vol. 2. Vector-valued Function Spaces*, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 138. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008. x+234 pp.

[14] F. Forelli, *The isometries of* H^p, Canad. J. Math., **16** (1964), 721–728

[15] I. M. Gelfand, *On normed rings*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **23** (1939), 430–432

[16] I. M. Gelfand, *To the theory of normed rings. II. On absolutely convergent trigonometric series and integrals*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **25** (1939), 570–572

[17] I. M. Gelfand, *To the theory of normed rings. III. On the ring of almost periodic functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **25** (1939), 573–574

[18] I. M. Gelfand, *Normierte Ringe*, Rec. Math. (Mat. Sbornik), N. S. **9(51)** (1941), 3–24

[19] O. Hatori, *Hermitian operators and isometries on Banach algebras of continuous maps with values in unital commutative* C^**-algebras*, J. Funct. Spaces, **2018**, Art. ID 8085304, 14pp.

[20] O. Hatori, Y. Iida, S. Stević and S. Ueki, *Multiplicative isometries on* F*-algebras of holomorphic functions*, Abst. Appl. Anal. 2012, Art. ID 125987, 16pp.

[21] O. Hatori, S. Lambert, A. Luttman, T. Miura, T. Tonev and R. Yates, *Spectral preservers in commutative Banach algebras*. Function spaces in modern analysis, 103–123, Contemp. Math., **547**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[22] O. Hatori and T. Miura, *Real linear isometries between function algebras. II*, Cent. Eur. J. Math., **11** (2013), 1838–1842

[23] O. Hatori and L. Molnár, *Isometries of the unitary groups and Thompson isometries of the spaces of invetible positive elements in C^*-algebras*, J. Math. Anal. Appl., **409** (2014), 158–167

[24] O. Hatori and S. Oi, *Isometries on Banach algebras of vector-valued maps*, Acta Sci. Math. (Szeged), **84** (2018), 151–183

[25] O. Hatori, S. Oi and H. Takagi, *Peculiar homomorphisms on algebras of vector-valued maps*, Studia Math., **242** (2018), 141–164

[26] O. Hatori and K. Tanabe, *Note on the proof of the existence of $D(p)$ of a theorem of Jarosz*, Nihonkai Math. J., **30** (2019), 27–29

[27] I. N. Herstein, *Jordan homomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc., **81** (1956), 331-341

[28] K. Jarosz, *Isometries in semisimple, commutative Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **94**(1985), 65–71

[29] K. Jarosz and V. D. Pathak, *Isometries between function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **305** (1988), 193–206.

[30] R. V. Kadison, *Isometries of operator algebras,* Ann. of Math. **54** (1951), 325–338.

[31] R. V. Kadison, *A generalized Schwarz inequality and algebraic invariants for operator algebras,* Ann. of Math. **56** (1952), 494–503.

[32] S. Kakutani, *Rings of analytic functions*, Lectures on functions of a complex variable, The Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, (1955), 71–83

[33] K. Kawamura, *Banach-Stone type theorems for C^1-function spaces over Riemannian manifolds*, Acta Sci. Math. (Szeged), **83** (2017), 551–591

[34] K. Kawamura, *Perturbations of norms on C^1-function spaces and associated isometry groups*, Topology Proc., **51** (2018), 169–196

[35] K. Kawamura, H. Koshimizu and T. Miura, *Norms on $C^1([0,1])$ and their isometries*, Acta Sci Math. (Szeged), **84** (2018), 239–261

[36] K. Kawamura and T. Miura, *Real-linear surjective isometries between function spaces*, Topology Appl., **226** (2017), 66–85

[37] J. Lamperti, *On the isometries of certain function-spaces*, Pacific. J. Math., **8** (1958), 459–466

[38] P. Mankiewicz, *On extension of isometries in normed linear spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., **20** (1972), 367–371

[39] M. Marcus *All linear operators leaving the unitary group invariant*, Duke Math. J. **26** (1959), 155–163

[40] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés*, C. R. Acad. Sci, Paris, **194** (1932), 946–948

[41] T. Miura, *Real-linear isometries between function algebras*, Cent. Eur. J. Math., **9** (2011), 778–788

[42] T. Miura, *Surjective isometries between function spaces*, Contemp. Math., **645** (2015), 231–239

[43] T. Miura and H. Takagi, *Surjective isometries on the Banach space of continuously differentiable functions*, Contemp. Math., **687** (2017), 181–192

[44] L. Molnár, *Maps between the positive definite cones of operator algebras preserving a norm of a geodesic correspondence*, Acta Sci. Math. (Szeged), **84** (2018), 451–463

[45] M. Mori and N. Ozawa, *Mankiewicz's theorem and the Mazur-Ulam property for C^*-algebras*, Studia Math., Published online: 6 August 2019

[46] M. Nagasawa, *Isomorphisms between commutative Banach algebras with an application to rings of analytic functions*, Kōdai Math. Sem. Rep., **11** (1959), 182–188

[47] A. Nikou and A. G. O'Farrell, *Banach algebras of vector-valued functions*, Glasg. Math. J., **56** (2014), 419–426; Corrigendum, Glasg. Math. J., Trust 2019

[48] M. Nagumo, *Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen*, Japan. J. Math., **13** (1936), 61-80

[49] W. Novinger, *Linear isometries of subspaces of spaces of continuous functions*, Studia Math., **53** (1975), 273–276

[50] S. Oi, *Hermitian operators and isometries on algebras of matrix-valued Lipschitz maps*, Linear Multilinear Algebras, Published online: 08 October 2018

[51] T. W. Palmer, *Banach algebras and the general theory of *-algebras. Vol. I. Algebras and Banach algebras*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 49, Cambridge University Press, Cambridge, 1994

[52] A. L. Paterson and A. M. Sinclair, *Characterizations of isometries between C^*-algebras*, J. London Math. Soc., **2** (1972), 755–761

[53] A. M. Peralta, *A survey on Tingley's problem for operator algebras*, Acta Sci. Math. (Szeged), **84** (2018), 81–123

[54] N. V. Rao and A. K. Roy, *Linear isometries of some function spaces*, Pacific J. Math., **38** (1971), 177–192

[55] T. M. Rassias, *Properties of isometric mappings*, J. Math. Anal. Appl., **235** (1999), 108–121.

[56] C. E. Rickart, *General theory of Banach algebras*, The University Series in Higher Mathematics, D. van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto-London-New York, 1960. xi+394 pp.

[57] M. H. Stone, *Applications of the theorey of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc., **41** (1937), 375–481

[58] D. Tingley, *Isometries of the unit sphere*, Geom. Dedicata, **22** (1987), 371–378

[59] S. Ueki, *Isometries of the Zygmund F-algebra*, Proc. Amer. Math. Soc., **140** (2012), 2817–2824

[60] J. Väisälä, *A proof of the Mazur-Ulam theorem*, Amer. Math. Monthly, **110** (2003), 633–635

[61] N. Weaver, *Isometries of noncompact Lipschitz spaces*. Canad. Math. Bull., **38** (1995), 242–249

[62] N. Weaver, *Lipschitz algebras*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1999. xiv+223 pp.

[63] J. Wermer, *On algebras of continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 866–869

[64] K. Yosida, *On the group embedded in the metrical complete ring*, Jap. J. Math., **13** (1936), 459–472

[65] W. Żelazko, *Banach Algebras*, Translated from the Polish by Marcin E. Kuczma, Elsivier Publishing Co., Amsterdam-London-New York; PWN–Polish Scientifc Publishers, Warsaw, 1973. xi+182 pp.

Institute of Science and Technology
Niigata University
Niigata 950-2102
JAPAN